

## CHAPITRE III.

## LES SEICHES LONGITUDINALES DU LAC DE GENÈVE.

Dans le présent chapitre, on appliquera quelques-unes des méthodes exposées précédemment au calcul des seiches longitudinales du lac de Genève; l'intérêt de ces calculs sera de montrer le degré de précision avec lequel les méthodes en question permettent de retrouver des résultats expérimentaux établis par de très nombreuses observations, en même temps que de tester la valeur pratique de ces différentes méthodes.

Le lac de Genève, le plus étendu des lacs alpins, présente une superficie d'environ 583 km<sup>2</sup>, dont 234 km<sup>2</sup> appartiennent à la France et 349 km<sup>2</sup> à la Suisse. Sa longueur maxima, mesurée le long du Talweg Genève-Villeneuve, est de 74 km; sa largeur maxima, de Morges à Amphion, est de 13,8 km, pour une largeur moyenne de 8 km environ. La profondeur maxima est de 310 m et son altitude moyenne de 372 m au-dessus du niveau de la mer.

## § 1. RÉSULTATS DES OBSERVATIONS.

a) Une oscillation longitudinale uninodale (le fondamental) a été signalée par F. A. FOREL <sup>(77)</sup> et confirmée par de nombreuses observations modernes <sup>(78)</sup>. FOREL lui attribue une période de 73 min. 30 sec. (valeur moyenne de ses observations), résultat en bon accord avec les relevés les plus modernes (les valeurs observées vont de 71 min. 30 sec. à 75 min., ce qui fournit une période moyenne extrêmement voisine de celle trouvée par FOREL). Cette seiche a été enregistrée aux stations limnographiques de Cully, Meillerie, Saint-Prex, Hermance, Bellevue, Coppet, Saint-Sulpice, Vevey, Chillon et Genève. Elle n'a pu être observée à Rolle et à Fleur-d'Eau; son nœud par conséquent se trouve dans cette dernière région, c'est-à-dire au voisinage immédiat de l'embouchure du « Petit-Lac ».

b) L'existence d'une seiche binodale (le second mode) a été également reconnue depuis très longtemps <sup>(79)</sup> et confirmée à nouveau par les observations modernes.

F. A. FOREL lui attribue une période voisine de 35 min. (valeur moyenne de ses observations); les observations modernes fournissent des valeurs allant de 32 min. 30 sec. à 36 min. (peut-être 35 min. 30 sec. ?), d'où une valeur moyenne qui ne s'écarte guère de celle trouvée par FOREL.

<sup>(77)</sup> FOREL, F. A., *Le Léman*, II, p. 107.

<sup>(78)</sup> Cf. p. ex. les enregistrements du Service Fédéral des Eaux à Berne, notamment le plan n° 14.036 (relevés limnographiques de juillet-août 1950).

<sup>(79)</sup> Cf. FOREL, F. A., *op. cit.*, *ibid.*

Cette seiche s'observe entre autres à Rolle, Thonon, Saint-Sulpice, Cully, Vevey, Chillon, Saint-Gingolph, Hermance, Genève; à la station de Morges elle manque régulièrement dans les enregistrements. Son nœud occidental doit se situer dans la partie sud du « Petit-Lac » (entre la ligne Coppet-Hermance et Genève), non loin de la ligne transversale passant par Versoix; quant à son nœud oriental, il est très voisin de la section transversale de Morges.

c) Il existe vraisemblablement des seiches longitudinales de nodalité plus élevée, mais leur débrouillage est très difficile; les observateurs anciens (notamment F. A. FOREL) n'ont pu tirer la chose au clair, et les enregistrements modernes dont on a pu disposer pour le présent travail (cf. note 78) ne sont guère suffisants pour résoudre le problème de manière satisfaisante. Etant donné, d'autre part, le but des présents calculs sur le lac de Genève, on se contentera de calculer les périodes et les amplitudes relatives des deux premiers modes (seiches uninodale et binodale) du lac, qui d'ailleurs sont de loin les plus importants.

## § 2. DONNÉES BATHYMÉTRIQUES ET GÉOGRAPHIQUES.

Le lac a été divisé en vingt-cinq tronçons, de longueur pratiquement égale, et numérotés de 1 à 25, d'est en ouest (cf. pl. I).

Les tronçons 1 à 16 constituent le « Grand-Lac » et les tronçons 17 à 25 le « Petit-Lac ». La carte utilisée est celle publiée par A. DELEBECQUE dans son « Atlas des Lacs français » (Paris, 1898), à l'échelle 1/100.000<sup>e</sup>; elle fournit les isobathes de 20 en 20 m, ce qui est amplement suffisant pour les calculs proposés.

Dans la table de mesures qui suit, le contour du lac a été légèrement « rectifié », afin de rendre le lac plus conforme à ce qu'exige l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides (cf. p. 19); la surface ainsi « rognée » ne comprend que 23 km<sup>2</sup> environ, soit moins de 4 % de la surface totale du lac, et représente, au point de vue des oscillations, des « eaux-mortes »; le rôle physique de celles-ci est de ralentir le mouvement oscillatoire; leur suppression dans les calculs aura donc pour effet de raccourcir les périodes. On pourra se rendre compte par les calculs effectués sur le Tanganika (cf. pp. 123 et 134 sqq.) que cet effet est faible. Les « rectifications » du contour sont indiquées sur la carte en traits interrompus.

Section n°	$\Delta x$ km	$x$ km	$S(x)$ km <sup>2</sup>	$b(x)$ km	$\sigma(v)$ 10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>	$\beta(x)$ km <sup>(80)</sup>	$\tau(v)=S\beta$ 10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>	$\Delta v$ km <sup>2</sup>	$v(x)$ km <sup>2</sup>
1	1,5	1,5	0,175	2,8	0,490	2,133	0,373	3,2	3,2
2	3	4,5	0,485	5,2	2,522	3,867	1,875	11,6	14,8
3	3	7,5	1,197	7,8	9,337	6,300	7,541	18,9	33,7
4	3	10,5	1,714	8,9	15,255	8,000	13,712	24,0	57,7
5	3	13,5	1,800	8,0	14,400	8,133	14,639	24,4	82,1

Le graphique ci-après (fig. 10) représente la « courbe normale » du lac (cf. p. 24).

(80) Pour l'usage des grandeurs  $\beta(x)$  et  $\tau(v)$ , cf. p. 98.

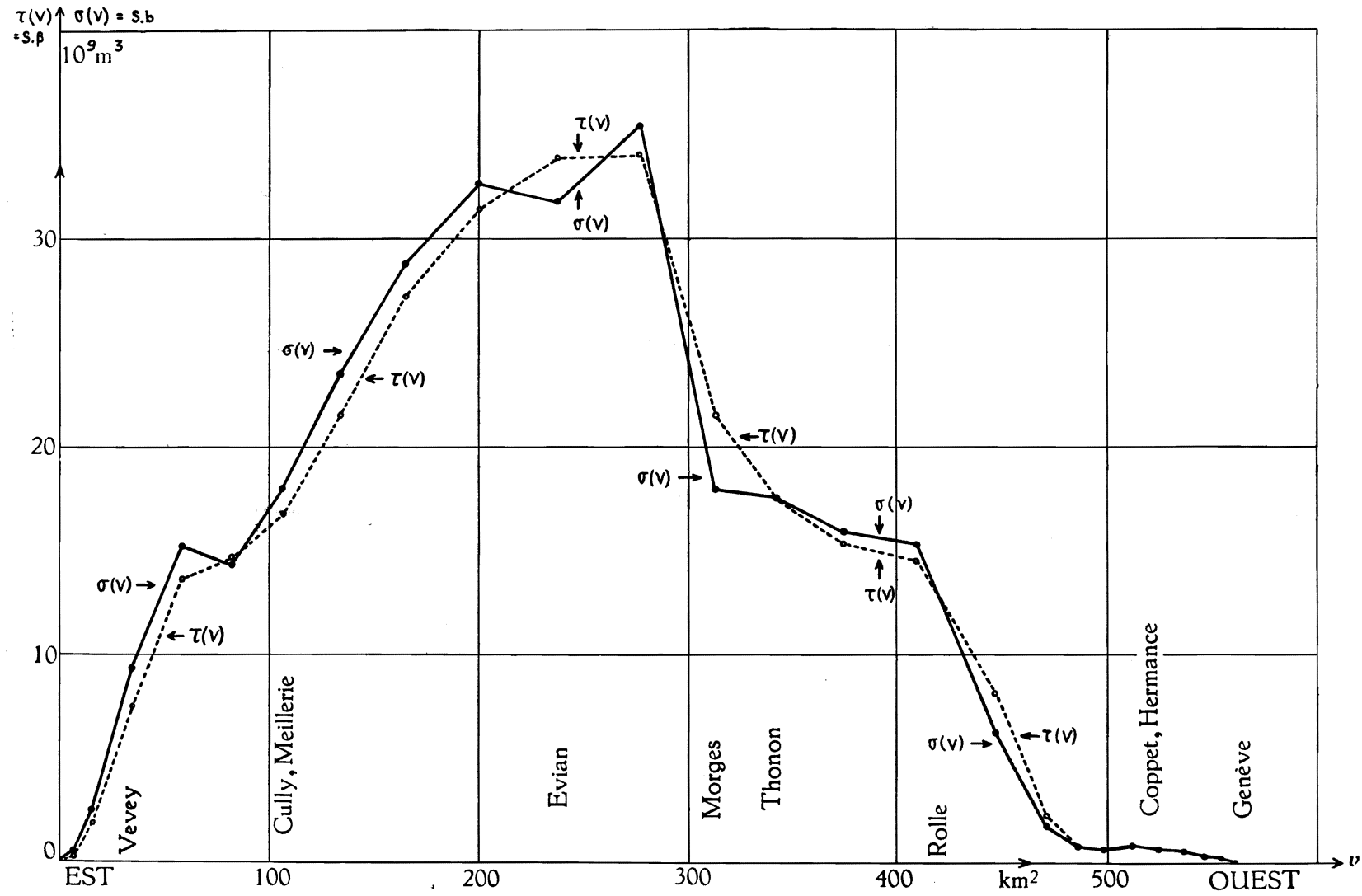


FIG. 10. — Lac de Genève. Courbe normale (contour « rectifié »).

Section	$\Delta x$	$x$	$S(x)$	$b(x)$	$\sigma(v)$	$\beta(x)$	$\tau(v)=S.\beta$	$\Delta v$	$v(x)$
n°	km	km	km <sup>2</sup>	km	10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>	km	10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>	km <sup>2</sup>	km <sup>2</sup>
6	3	16,5	2,071	8,7	18,018	8,100	16,775	24,3	106,4
7	3	19,5	2,359	10,0	23,590	9,133	21,545	27,4	133,8
8	3	22,5	2,625	11,0	28,875	10,367	27,213	31,1	164,9
9	3	25,5	2,704	12,1	32,718	11,633	31,456	34,9	199,8
10	3	28,5	2,674	11,9	31,821	12,667	33,872	38,0	237,8
11	3	31,5	2,611	13,6	35,510	13,033	34,029	39,1	276,9
12	3	34,5	1,788	10,1	18,059	12,067	21,576	36,2	313,1
13	3	37,5	1,744	10,1	17,614	10,100	17,614	30,3	343,4
14	3	40,5	1,465	10,9	15,968	10,500	15,382	31,5	374,9
15	3	43,5	1,273	12,1	15,403	11,500	14,639	34,5	409,4
16	3	46,5	0,657	9,7	6,373	12,400	8,147	37,2	446,6
17	3	49,5	0,293	6,3	1,846	8,100	2,373	24,3	470,9
18	3	52,5	0,197	4,0	0,788	5,000	0,985	15,0	485,9
19	3	55,5	0,165	4,2	0,693	4,267	0,704	12,8	493,7
20	3	58,5	0,186	4,4	0,818	4,400	0,818	13,2	511,9
21	3	61,5	0,175	4,0	0,700	4,200	0,735	12,6	524,5
22	3,1	64,6	0,169	3,8	0,642	3,806	0,643	11,8	536,3
23	3	67,6	0,065	2,2	0,143	3,267	0,212	9,8	546,1
24	3	70,6	0,047	3,0	0,141	2,600	0,122	7,8	553,9
25	3,3	73,9	0	0	0	1,879	0	6,2	560,1

### § 3. CALCUL DES SEICHES PAR LA MÉTHODE D'EXISTENCE DE A. DEFANT.

a) Recherche du mode fondamental. — Deux premiers essais, effectués respectivement avec  $\lambda_1 = 2,117 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  (c'est-à-dire  $T_1 = 4.360 \text{ sec.} = 72 \text{ min. } 40 \text{ sec.}$ ; à la latitude du lac,  $g = 981 \text{ cm sec.}^{-2}$ ) et  $\lambda_1 = 2,133 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  (c'est-à-dire  $T_1 = 4.344 \text{ sec.} = 72 \text{ min. } 24 \text{ sec.}$ ), avaient laissé des « résidus » respectifs de  $u_{25} = 8,8373 \times 10^6 \text{ m}^3$  ( $\zeta_0 = 100 \text{ cm}$ , valeur arbitraire) et  $u_{25} = 7,0106 \times 10^6 \text{ m}^3$ .

Les résultats ci-après sont obtenus avec  $\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  ( $T_1 \simeq 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$ ) et  $\lambda_1 = 2,19 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  ( $T_1 \simeq 4.287 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 27 \text{ sec.}$ ). En vue d'essayer la stabilité de la méthode, on a effectué les calculs relatifs à la première valeur propre  $\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  une première fois en partant de l'est et une seconde fois en partant de l'ouest; la concordance des résultats ainsi obtenus est excellente, et l'on retiendra la valeur de  $\lambda_1 = 2,19 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ .

Voici les essais avec :

$\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  ( $T_1 \simeq 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$ ) : est-ouest.

Section n°	$\zeta$ cm	$u$ $10^6 \text{ m}^3$	$\xi$ $10^3 \text{ cm}$	$\Delta\zeta$ cm
1	100,0000	3,2000	18,2857	- 0,6034
2	99,3966	14,7300	30,3711	- 2,0045
3	97,3921	33,1371	27,6835	- 1,8271
4	95,5650	56,0727	32,7145	- 2,4592
5	93,4058	78,8637	43,8132	- 2,8917
6	90,5141	100,8586	48,7004	- 3,2142
7	87,2999	124,7788	52,8948	- 3,4911
8	83,8088	150,8433	57,4641	- 3,7926
9	80,0162	178,7690	66,1128	- 4,3634
10	75,6528	207,5171	77,6055	- 5,1220
11	70,5308	235,0946	90,0401	- 5,9426
12	64,5882	258,4755	144,5613	- 9,5410
13	55,0472	275,1548	157,7722	- 10,4130
14	44,6342	289,2146	197,4161	- 13,0295
15	31,6047	300,1182	235,7567	- 15,5599
16	16,0448	306,0869	465,8857	- 30,7485
17	- 14,7037	302,5139	1.032,4707	- 68,1431
18	- 82,8468	290,0869	1.472,5223	- 97,1865
19	-180,0333	267,0427	1.618,4406	-106,8171
20	-286,8504	229,1784	1.232,1419	- 81,3214
21	-368,1718	182,7888	1.044,5074	- 68,9375
22	-437,1093	131,2099	776,3900	- 52,9498
23	-490,0591	83,1841	1.279,7554	- 84,4639
24	-574,5230	38,3713	816,4106	- 53,8831
25	-628,4061	-0,5899	—	—

$\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  ( $T_1 \simeq 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$ ) : ouest-est.

Section n°	$\zeta$ cm	$u$ $10^6 \text{ m}^3$	$\xi$ $10^3 \text{ cm}$	$\Delta\zeta$ cm
25	100,0000	6,2000	131,9149	- 9,5770
24	92,4230	13,2530	203,8922	-13,4569
23	76,9661	20,7957	123,0513	- 8,1214
22	68,8447	28,9194	165,2536	-11,2703
21	57,5744	36,1738	194,4827	-12,8359
20	44,7385	42,0793	255,0260	-16,8317
19	27,9068	45,6514	231,7328	-15,2944
18	12,6124	47,5433	162,2637	-10,7094
17	1,9030	48,0057	73,0681	- 4,8225
16	- 2,9195	46,9196	36,8575	- 2,4326

Section n°	$\zeta$ cm	$u$ $10^6 \text{ m}^3$	$\xi$ $10^2 \text{ cm}$	$\Delta\zeta$ cm
15	- 5,3521	45,0731	30,7666	- 2,0306
14	- 7,3827	42,7476	24,5112	- 1,6177
13	- 9,0004	40,0205	22,3828	- 1,4773
12	-10,4777	36,2276	13,8750	- 0,9157
11	-11,3934	31,7728	11,8821	- 0,7842
10	-12,1776	27,1453	10,0389	- 0,6626
9	-12,8402	22,6641	8,6339	- 0,5689
8	-13,4100	18,4936	7,8396	- 0,5174
7	-13,9274	14,6775	7,0872	- 0,4678
6	-14,3952	11,1795	6,2108	- 0,4099
5	-14,8051	7,5671	4,4149	- 0,2914
4	-15,0965	3,9440	3,2949	- 0,2175
3	-15,3140	1,0497	2,1643	- 0,1428
2	-15,4568	- 0,7433	-4,2474	0,2803
1	-15,1765	- 1,2289	—	—

$\lambda_1 = 2,19 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  ( $T_1 \simeq 4.287 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 27 \text{ sec.}$ ) : ouest-est.

Section n°	$\zeta$ cm	$u$ $10^6 \text{ m}^3$	$\xi$ $10^2 \text{ cm}$	$\Delta\zeta$ cm
25	100,0000	6,2000	131,9149	- 9,5335
24	90,4665	13,2564	203,9444	-13,3991
23	77,0674	20,8090	123,1302	- 8,0897
22	68,9777	28,9484	165,4192	-11,2303
21	57,7474	36,2246	194,7558	-12,7955
20	44,9519	42,1583	255,5046	-16,7867
19	28,1652	45,7634	232,3018	-15,2622
18	12,9030	47,6988	162,7947	-10,6956
17	2,2074	48,2352	73,4173	- 4,8235
16	- 2,6161	47,2620	37,1265	- 2,4392
15	- 5,0553	45,5179	31,0702	- 2,0413
14	- 7,0966	43,2825	24,8179	- 1,6305
13	- 8,7271	40,6382	22,7283	- 1,4932
12	-10,2203	36,9385	14,1473	- 0,9295
11	-11,1498	32,5789	12,1836	- 0,8005
10	-11,9503	28,0378	10,3690	- 0,6812
9	-12,6315	23,6294	9,0017	- 0,5914
8	-13,2229	19,5171	8,2735	- 0,5436
7	-13,7665	15,7451	7,6027	- 0,4995
6	-14,2660	12,2785	6,8214	- 0,4482
5	-14,7142	8,6882	5,0690	- 0,3330
4	-15,0472	5,0769	4,2414	- 0,2787
3	-15,3259	2,1803	4,4955	- 0,2954
2	-15,6213	0,3683	2,1046	- 0,1383
1	-15,7596	- 0,1360	—	—

Comparons la période ainsi obtenue (en retenant la valeur propre  $\lambda_1 = 2,19 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ , c'est-à-dire  $T_1 = 71 \text{ min. } 27 \text{ sec.}$ ) avec les données expérimentales ( $T_1 = 73 \text{ min. } 30 \text{ sec.}$ ) : l'écart est inférieur à  $-2,8 \%$ , ce qui est tout à fait satisfaisant. La chose est d'autant plus remarquable qu'aux extrémités du lac, on a imposé la condition-frontière du déplacement horizontal nul ( $\partial\zeta/\partial x = 0$ ) au lieu d'imposer le mouvement tangentiel au fond ( $\zeta = \xi \partial h / \partial x$ ); la valeur du rapport  $\zeta/\xi$  (0,055 à l'extrémité est, et 0,0075 environ à l'extrémité ouest) indique l'existence d'un mouvement horizontal non négligeable; le rapport  $-\Delta h/\Delta x$  a respectivement aux extrémités est et ouest les valeurs 0,033 et 0,005 environ. A. T. DOODSON et ses collaborateurs, dans leur travail théorique sur les seiches du LÉMAN <sup>(81)</sup> suivant une méthode exposée plus haut (pp. 81-83) et qui nécessitait des calculs beaucoup plus longs (ils ont effectué jusqu'à 200 divisions longitudinales, alors que les calculs effectués ici n'en utilisent que 25) avaient trouvé  $T_1 = 4.467 \text{ sec.} = 74 \text{ min. } 27 \text{ sec.}$ , soit un résultat s'écartant de 1,3 % environ de la valeur moyenne des observations.

Le nœud se trouve approximativement à mi-distance entre les 16<sup>e</sup> et 17<sup>e</sup> sections droites, c'est-à-dire à 1,5 km environ à l'ouest de la ligne transversale passant par Fleur-d'Eau. A. T. DOODSON et ses collaborateurs le placent à 2 km à l'ouest de cette même ligne. Ici encore l'accord avec les données expérimentales est excellent.

b) Second mode (seiche binodale). — Deux essais effectués respectivement avec  $\lambda_2 = 9,0 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  ( $T_2 \simeq 2.115 \text{ sec.} = 35 \text{ min. } 15 \text{ sec.}$ ) et  $\lambda_2 = 9,2 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  ( $T_2 \simeq 2.091 \text{ sec.} = 34 \text{ min. } 51 \text{ sec.}$ ) avaient laissé des « résidus » respectifs de  $u_{25} = -1,5127 \times 10^6 \text{ m}^3$  et  $0,8662 \times 10^6 \text{ m}^3$ ; une interpolation linéaire conduit ainsi à essayer la valeur propre  $\lambda_2 = 9,127 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  ( $T_2 \simeq 2.095 \text{ sec.} = 34 \text{ min. } 55 \text{ sec.}$ ); cette valeur sera adoptée comme « exacte ».

Section n°	$\zeta$ cm	$u$ $10^6 \text{ m}^3$	$\xi$ $10^2 \text{ cm}$	$\Delta\zeta$ cm
1	100,0000	3,2000	18,2857	- 2,5034
2	97,4966	14,5096	29,9167	- 8,1915
3	89,3051	31,3883	26,2224	- 7,1800
4	82,1251	51,0983	29,8123	- 8,1629
5	73,9622	69,1451	38,4139	-10,5181
6	63,4441	84,5620	40,8315	-11,1801
7	52,2640	98,8823	41,9171	-11,4773
8	40,7867	111,5670	42,5017	-11,6374
9	29,1493	121,7401	45,0222	-12,3275
10	16,8218	128,1324	47,9179	-13,1204

<sup>(81)</sup> DOODSON, A. T., CAREY, R. M. and BALDWIN, R., *Theoretical Determination of the Longitudinal Seiches of Lake Geneva*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 52 (1920), pp. 629-642.

Section n°	$\zeta$ cm	$u$ $10^6 m^3$	$\xi$ $10^2 cm$	$\Delta\zeta$ cm
11	3,7014	129,5796	49,6284	-13,5888
12	9,8874	126,0004	70,4700	-19,2954
13	- 29,1828	117,1580	67,1778	-18,3940
14	- 47,5768	102,1713	69,7415	-19,0959
15	- 66,6737	79,1692	62,1910	-17,0285
16	- 83,7012	48,0324	73,1087	-20,0179
17	-103,7191	22,8287	77,9137	-21,3335
18	-125,0526	4,0708	20,6640	- 5,6580
19	-130,7106	-12,6602	- 76,7282	21,0089
20	-109,7017	-27,1408	-145,9184	39,9539
21	- 69,7478	-35,9290	-205,3087	56,2156
22	- 13,5322	-37,5258	-222,0462	62,8251
23	49,2929	-37,6951	-503,0015	137,7268
24	187,0197	-18,1076	-385,2681	105,4903
25	292,5100	0,0280	—	—

En retenant comme « exacte » la valeur  $T_2 = 2.095$  sec. = 34 min. 55 sec., on a un résultat qui s'écarte très peu de la moyenne des valeurs expérimentales (35 min. 30 sec.), de moins de -1,7 %; le résultat obtenu par A. T. DOODSON (cf. note 81) est  $T_2 = 2.106$  sec. (erreur de 1 % seulement par rapport aux résultats expérimentaux). Le nœud occidental se trouve, conformément aux résultats expérimentaux, sur la ligne transversale passant par Versoix (sud du « Petit-Lac »); quant au nœud oriental, il est situé sur la ligne transversale passant par Morges, ce qui est à nouveau un accord parfait avec les observations.

c) Vérification de l'orthogonalité des deux premiers modes. Une première manière de procéder consiste à calculer, par la méthode des rectangles, les intégrales :

$$\int_0^a \frac{u_1^2(v)}{\sigma(v)} dv \quad \int_0^a \frac{u_2^2(v)}{\sigma(v)} dv \quad \int_0^a \frac{u_1 u_2}{\sigma(v)} dv,$$

la norme étant définie comme la racine carrée du produit des deux premières; on divise ensuite la dernière par la norme, et si le quotient est très petit devant 1, l'orthogonalité peut être considérée comme satisfaisante (cf. pp. 29-30).

Voici les résultats des calculs :

Section n°	$\frac{u_1^2 \Delta v}{\sigma(v)}$ $10^9 m^5$	$\frac{u_2^2 \Delta v}{\sigma(v)}$ $10^9 m^5$	$\frac{u_1 u_2 \Delta v}{\sigma(v)}$ $10^9 m^5$
1	66,87	66,87	66,87
2	997,97	968,33	983,04
3	2.222,71	1.994,30	2.105,38
4	4.946,54	4.107,85	4.507,72
5	10.538,65	8.101,21	9.239,71



Section n°	$\frac{u_1^2 \Delta v}{\sigma(v)}$	$\frac{u_2^2 \Delta v}{\sigma(v)}$	$\frac{u_1 u_2 \Delta v}{\sigma(v)}$
	$10^9 \text{ m}^5$	$10^9 \text{ m}^5$	$10^5 \text{ m}^9$
6	13.719,21	9.643,84	11.502,38
7	18.084,46	11.356,83	14.331,16
8	24.506,92	13.406,33	18.125,92
9	34.089,70	15.809,03	23.214,78
10	51.425,34	19.605,82	31.752,83
11	60.857,33	18.488,51	33.543,43
12	132.923,04	31.824,09	65.283,83
13	130.238,51	25.611,77	55.454,41
14	165.006,74	20.592,80	58.291,94
15	201.742,71	14.038,68	53.218,43
16	546.875,90	13.466,90	85.817,96
17	1.204.662,89	6.820,20	90.907,82
18	1.601.849,05	315,45	22.478,80
19	1.317.161,74	2.960,36	- 62.445,12
20	847.552,31	11.886,83	-100.372,84
21	601.412,76	23.236,07	-118.213,67
22	316.432,26	25.882,54	- 90.499,50
23	474.209,97	73.258,05	-186.385,89
24	81.449,52	18.138,32	- 38.436,42
25	—	—	—
<b>Totaux</b>	<b>7.843.973,11</b>	<b>369.560,95</b>	<b>- 15.527,03</b>

La norme définie ci-dessus est égale à  $1.702.593,01 \times 10^9 \text{ m}^5$ , et le quotient du dernier total (souligné) par cette norme est égal à  $-0,00912$ , valeur qui permet de conclure à une orthogonalité satisfaisante des deux premiers modes d'oscillation.

La deuxième manière de vérifier l'orthogonalité des fonctions propres  $u_1$  et  $u_2$  consiste à utiliser, au lieu de la largeur  $b(x)$ , une largeur « moyenne »  $\beta(x)$ , définie par  $\beta(x_i) = \Delta v(x_i) / \Delta x_i$ . Cela simplifie un peu les calculs, puisque les expressions  $u_j u_k \Delta v / \tau(v)$  — en écrivant  $\tau(v)$  à la place de  $\sigma(v)$  pour désigner  $S(x) \beta(x)$  — deviennent  $u_j \xi_k \Delta x$ , en remarquant que  $u = S \xi$ , ce qui dispense d'effectuer des divisions et permet l'emploi de la règle de SIMPSON pour les intégrations, les intervalles  $\Delta x_i$  étant tous égaux à 3 km (à l'exception du premier et des derniers).

On obtient alors le tableau suivant, où l'on a calculé séparément  $u_1 \xi_2$  et  $u_2 \xi_1$  à titre de vérification; la concordance de ces résultats est pratiquement parfaite.

Section n°	$u_1 \xi_1$	$u_2 \xi_2$	$u_1 \xi_2$	$u_2 \xi_1$
	$10^{16} \text{ m}^4$	$10^{16} \text{ m}^4$	$10^{16} \text{ m}^4$	$10^{16} \text{ m}^4$
1	58,53	58,53	58,53	58,53
2	447,35	434,14	440,67	440,67
3	917,32	823,05	868,93	868,93
4	1.834,05	1.523,29	1.671,45	1.671,48
5	3.454,86	2.656,05	3.029,48	3.029,45

Section n°	$u_1 \xi_1$ $10^{16} \text{ m}^4$	$u_2 \xi_2$ $10^{16} \text{ m}^4$	$u_1 \xi_2$ $10^{16} \text{ m}^4$	$u_2 \xi_1$ $10^{16} \text{ m}^4$
6	4.911,88	3.452,58	4.118,11	4.118,07
7	6.599,61	4.145,05	5.230,36	5.230,36
8	8.667,27	4.741,72	6.411,13	6.411,09
9	11.818,48	5.480,73	8.048,23	8.048,23
10	16.105,63	6.139,99	9.944,36	9.944,17
11	20.267,10	6.431,06	11.667,52	11.667,38
12	37.365,87	8.879,22	18.214,77	18.214,69
13	43.410,42	7.870,81	18.484,58	18.484,33
14	57.095,84	7.125,34	20.170,29	20.170,19
15	70.756,29	4.923,58	18.664,64	18.664,65
16	142.604,27	3.511,47	22.377,71	22.377,62
17	312.332,50	1.778,69	23.570,08	23.570,26
18	427.163,33	84,09	5.993,26	5.993,16
19	432.188,22	971,40	-20.489,98	-20.489,45
20	282.381,85	3.960,27	-33.441,95	-33.441,57
21	190.925,98	7.376,79	-37.528,23	-37.528,09
22	101.870,13	8.320,21	-29.134,66	-29.134,81
23	106.449,60	16.448,10	-41.841,55	-41.841,43
24	31.317,49	6.977,24	-14.783,12	-14.783,23
25	—	—	—	—

En intégrant par la règle de SIMPSON (le premier intervalle avec  $\Delta x = 1,5 \text{ km}$ , étant traité à part, comme un triangle), on obtient les résultats suivants :

$$\int_0^l u_1 \xi_1 dx = 7.019.607,99 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_2 \xi_2 dx = 345.530,12 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_1 \xi_2 dx = -17.616,49 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_2 \xi_1 dx = -17.615,23 \times 10^9 \text{ m}^5.$$

La norme est égale à  $1.557.396,75 \times 10^9 \text{ m}^5$ , et les quotients des deux dernières intégrales par cette norme sont tous deux égaux à  $-0,01311$ , résultat voisin de celui obtenu par le premier procédé [emploi de  $\sigma(v)$ ].

En intégrant par rectangles, on obtient :

$$\int_0^l u_1 \xi_1 dx = 6.906.742,00 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_2 \xi_2 dx = 342.252,56 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_1 \xi_2 dx = 5.146,19 \times 10^9 \text{ m}^5,$$

$$\int_0^l u_2 \xi_1 dx = 5.146,40 \times 10^9 \text{ m}^5.$$

La norme est maintenant égale à  $1.537.482,85 \times 10^9 \text{ m}^5$ , et les quotients des deux dernières intégrales par cette norme sont tous deux égaux à  $0,00335$ , résultat nettement différent du précédent, mais permettant, comme du reste ce dernier, de conclure à une orthogonalité satisfaisante.

Voici, pour terminer, les courbes représentant les fonctions propres des deux premières modes, calculés par la méthode de DEFANT, ainsi qu'un graphique (voir p. 102) donnant les profils de ces deux seiches. L'exagération des amplitudes dans le « Petit-Lac » est conforme aux résultats expérimentaux.

Il est intéressant de noter que le « Petit-Lac », dont la masse d'eau représente 3,5 % seulement de la masse d'eau totale, oscille donc, en ce qui concerne le mode fondamental, à peu près comme un bassin quart-d'onde ouvert sur une masse d'eau infinie; en d'autres termes, l'énergie cinétique du « Grand-Lac » est, pour ce mode, pratiquement négligeable devant celle du « Petit-Lac ».

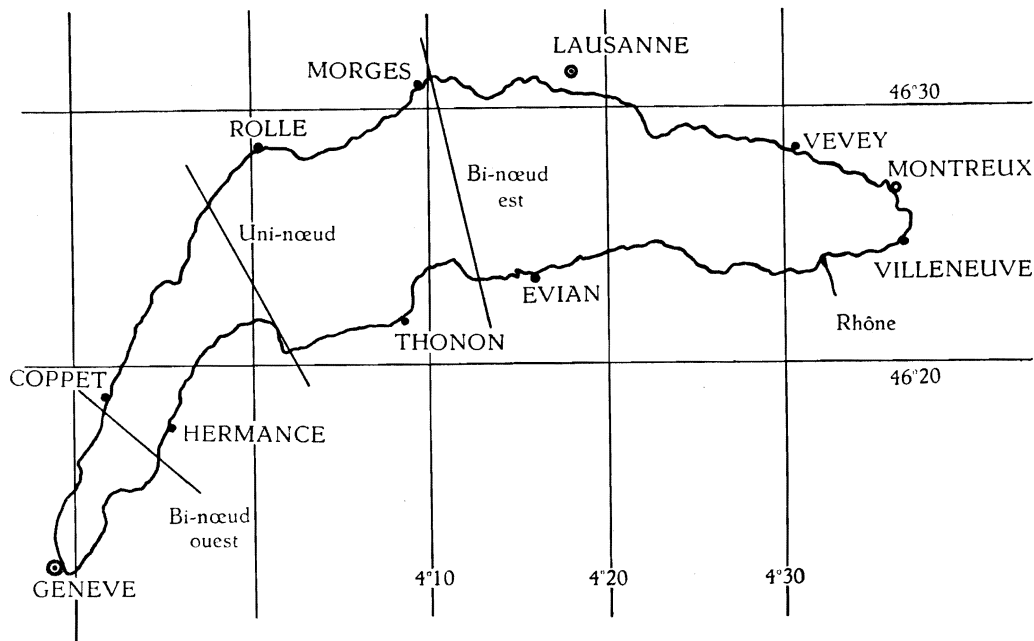


FIG. 11. — Lac de Genève. Carte approximative.  
Positions des lignes nodales trouvées par la méthode de DEFANT (contour « rectifié »).

#### § 4. CALCUL DU MODE FONDAMENTAL PAR LA FORMULE DE DU BOYS.

$$T_1 = 2 \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}} \quad (82)$$

Il est instructif de calculer par cette formule simple le fondamental du lac de Genève.

(82) Pour cette formule, cf. p. 9.

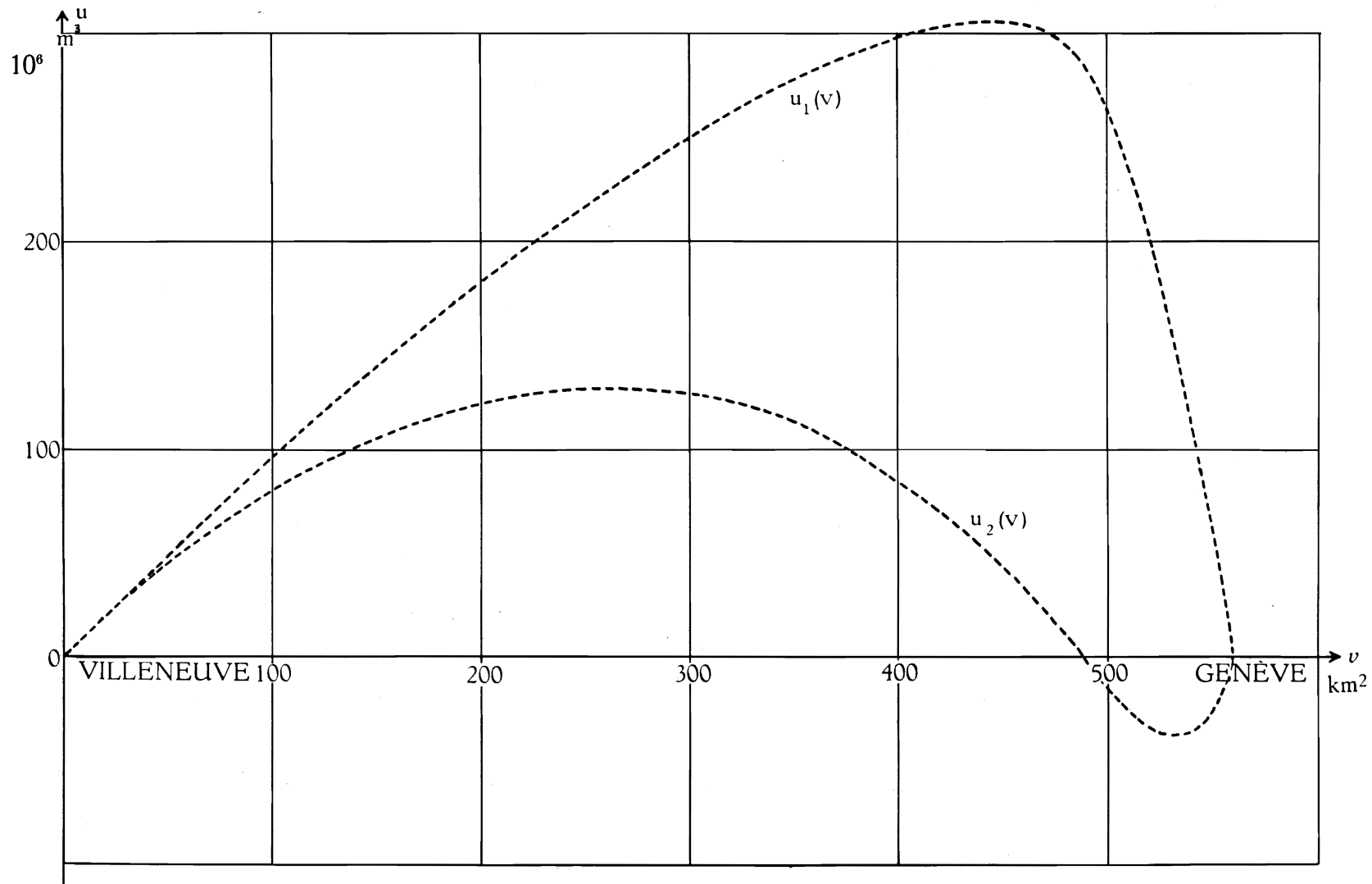


FIG. 12. — Lac de Genève. Fonctions propres des 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> modes longitudinaux (méthode de DEFANT; contour « rectifié »).

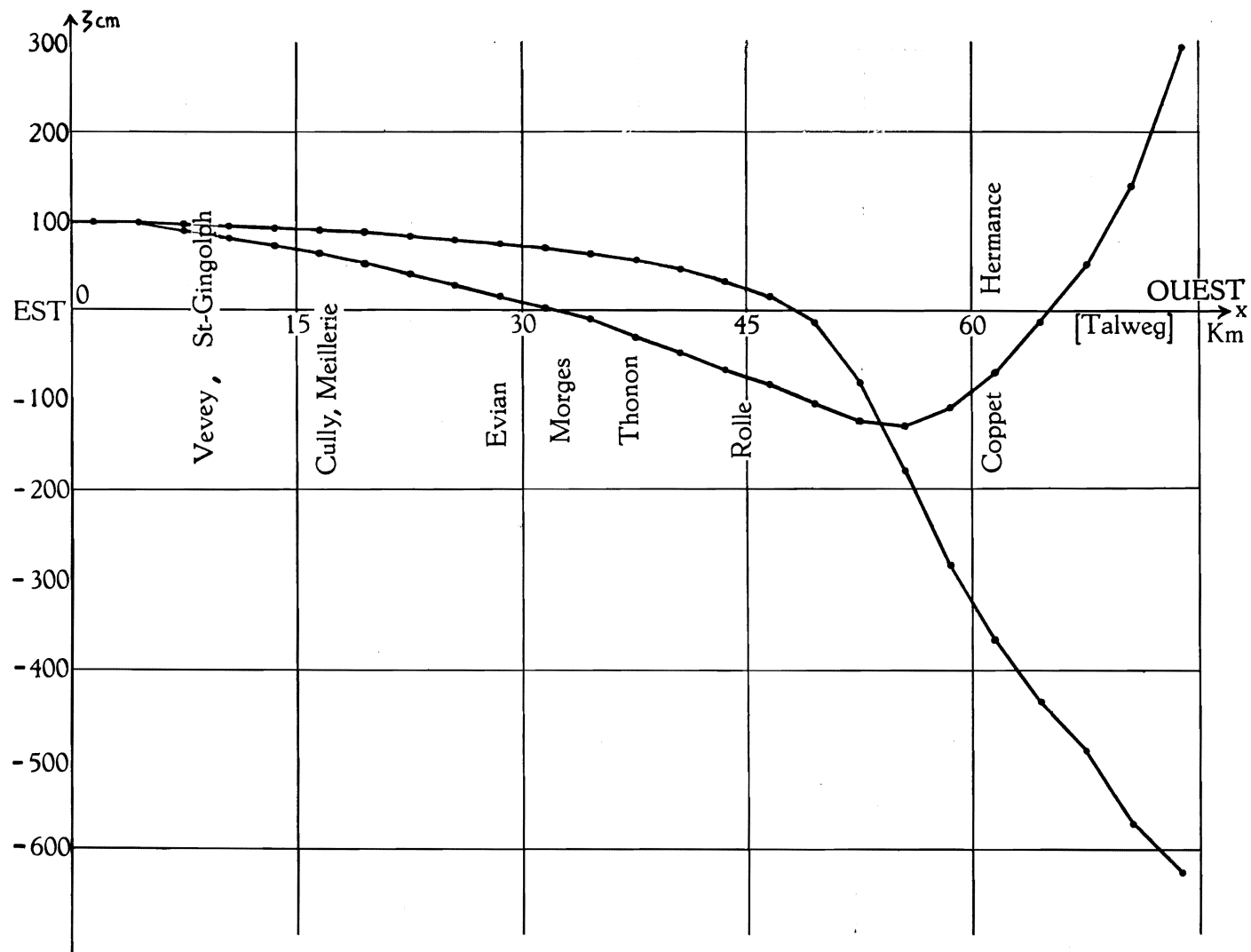


FIG. 13. — Lac de Genève. Profil des seiches unimodale et bimodale longitudinales (méthode de DEFANT; contour « rectifié »).

La profondeur  $h(x)$  est mesurée sur le Talweg; l'on a pris, pour le  $k^e$  compartiment, une valeur  $h(x)$  moyenne arithmétique entre  $h(x_{k-1})$  et  $h(x_k)$ , profondeurs maxima des sections droites limitant ce compartiment. Dès lors, il n'y a pas lieu d'appliquer la règle de SIMPSON, et l'on peut intégrer simplement par rectangles. Voici les résultats :

Section n°	$h(x)$ 10 <sup>2</sup> cm	$\frac{1}{\sqrt{h(x)}}$ 10 <sup>-1</sup> cm <sup>-1/2</sup>	Section n°	$h(x)$ 10 <sup>2</sup> cm	$\frac{1}{\sqrt{h(x)}}$ 10 <sup>-1</sup> cm <sup>-1/2</sup>
1	40 (60)	0,458118 (0,129099)	14	230	0,065930
2	110 (120)	0,095347 (0,091294)	15	180	0,074538
3	160	0,079058	16	120	0,091291
4	200 (210)	0,070710 (0,069006)	17	80	0,111807
5	240 (250)	0,067422 (0,063246)	18	65 (70)	0,124035 (0,119523)
6	270	0,060855	19	65 (70)	0,124035 (0,119523)
7	290	0,058722	20	60	0,129099
8	300	0,057733	21	60	0,129099
9	300 (305)	0,057733 (0,057260)	29	60	0,129099
10	300 (305)	0,057733 (0,057260)	23	50	0,141423
11	300	0,057733	24	40	0,158118
12	280	0,059763	25	16	0,250000
13	260	0,062016			

Dans certains cas, la profondeur  $h(x)$  est difficile à apprécier (divisions 1, 2, 4, 5, 9, 10, 18, 19); les données entre parenthèses désignent alors des mesures aussi probables que les autres.

En multipliant les valeurs  $1/\sqrt{h(x)}$  par  $\Delta x$  et en additionnant, on trouve :  $\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} = 6,839574 \times 10^4 \text{ cm}^{1/2}$  (ou, en utilisant chaque fois les données entre parenthèses :  $6,736327 \times 10^4 \text{ cm}^{1/2}$ ); multipliant encore par  $2/\sqrt{g} = 0,63855 \times 10^{-1} \text{ cm}^{-1/2} \text{ sec.}$ , il vient :  $T_1 = 4.367 \text{ sec.}$  (4.301 sec.) résultat qui s'écarte de la valeur observée  $T_1 = 4.410 \text{ sec.}$  de moins de 1 % (2,5 %).

On voit donc que malgré sa simplicité, la formule de Du Boys fournit ici un résultat comparable à celui obtenu par des calculs beaucoup plus longs à l'aide de la méthode de DEFANT.

#### § 5. CALCUL DU MODE FONDAMENTAL PAR LA MÉTHODE DE W. E. MILNE.

A titre de contrôle, on résoudra ici l'équation (I.10) pour le lac de Genève au moyen des formules (II.4) et (II.5), en se bornant au mode fondamental.

Une table de  $\sigma(v)$ , construite pour des  $\Delta v$  constants, est indispensable pour ces calculs; étant donné le peu de précision des mesures bathymétriques, on a cru pouvoir se contenter d'interpolations linéaires dans la table des pages 91-92.

$\Delta v$ , constant, est pris égal à **22,4** km<sup>2</sup>; on obtient ainsi **25** compartiments, de surface libre égale. Les  $S(x)$  et  $b(x)$  n'interviennent plus dans les calculs, pas plus que  $\xi$  et  $\Delta x$ .

Voici la table de  $\sigma(v)$  pour le lac de Genève.

Section n°	$v(x)$ km <sup>2</sup>	$\sigma(v)$ 10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>	Section n°	$v(x)$ km <sup>2</sup>	$\sigma(v)$ 10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>
1	22,4	5,262	14	313,6	18,052
2	44,8	12,074	15	336	17,723
3	67,2	14,922			
4	89,6	15,517	16	358,4	16,830
5	112,0	19,157	17	380,8	15,871
			18	403,2	15,505
6	134,4	23,692	19	425,6	11,470
7	156,8	27,498	20	448,0	6,412
8	179,2	30,449			
9	201,6	32,676	21	470,4	1,824
10	224,0	32,447	22	492,8	0,737
			23	515,2	0,787
11	246,4	32,632	24	537,6	0,576
12	268,8	34,764	25	560	0
13	291,2	28,617			

a) Calcul du fondamental longitudinal du lac de Genève à l'aide de la formule :

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} - \frac{\lambda \Delta v^2}{\sigma_n} u_n. \quad (\text{II.4})$$

Valeur d'essai :  $\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ ,  $(\lambda_1 \Delta v^2 = 11.038,72 \times 10^{10} \text{ cm}^3)$ .

Pour  $u_1$ , on prendra arbitrairement une valeur égale à celle trouvée au même point par la méthode de DEFANT (valeur calculée par interpolation linéaire), ceci afin de permettre la comparaison entre les résultats.

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ 10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup>	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ 10 <sup>6</sup> m <sup>3</sup>
—	0	0	0,004659	6	125,5902
			0,004014	7	144,5690
			0,003625	8	162,9675
0,020978	1	22,1317 (arbitraire)	0,003378	9	180,7752
0,009143	2	43,7991	0,003434	10	197,9722
0,007398	3	65,0660			
0,007114	4	85,8515			
0,005762	5	106,0263	0,003383	11	214,4894

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ $10^6 \text{ m}^3$	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ $10^6 \text{ m}^3$
0,003175	12	230,2810	0,009624	19	303,5675
0,003857	13	245,3415	0,018061	20	305,4685
0,006115	14	259,4557			
0,006228	15	271,9833			
0,006559	16	282,8170	0,060519	21	301,8524
0,006955	17	291,7957	0,149779	22	279,9685
0,007119	18	298,7450	0,140263	23	216,1512
			0,191644	24	122,0159
			—	25	4,4970

L'accord avec le résultat obtenu par la méthode de DEFANT est entièrement satisfaisant.

Nouvel essai :  $\lambda_1 = 2,22 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ , ( $\lambda_1 \Delta v^2 = 11.289,60 \times 10^{10} \text{ cm}^3$ ).

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ $10^6 \text{ m}^3$	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{\sigma(v)}$	Section n°	$u(v)$ $10^6 \text{ m}^3$
—	0	0	0,003945	13	244,4248
			0,006254	14	258,3722
			0,006370	15	270,7037
0,021455	1	22,1317 (arbitraire)			
0,009350	2	43,7886	0,006708	16	281,3108
0,007566	3	65,0361	0,007113	17	290,0309
0,007276	4	85,7915	0,007281	18	296,6880
0,005893	5	105,9227	0,009843	19	301,1849
			0,018471	20	302,7172
0,004765	6	125,4297			
0,004106	7	144,3390	0,061895	21	298,6580
0,003708	8	162,6556	0,153183	22	276,1134
0,003455	9	180,3691	0,143451	23	211,2729
0,003512	10	197,4594	0,196000	24	116,1251
			—	25	—1,7832
0,003460	11	213,8562			
0,003247	12	229,5131			

De ces deux essais, on tire, par interpolation linéaire, la valeur propre « améliorée » :

$$\lambda_1 = 2,236 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad T_1 = 4.242 \text{ sec} = 70 \text{ min } 42 \text{ sec.}$$

L'écart avec les résultats expérimentaux (valeur moyenne des observations :  $T_1 \simeq 73 \text{ min. } 30 \text{ sec.}$ ) et le résultat théorique trouvé précédemment par la méthode de DEFANT ( $T_1 = 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$ ) est très faible (0,82 % environ dans le dernier cas).



b) Essayons maintenant les mêmes valeurs de  $\lambda_1$  avec la formule :

$$u_{n+1} \left( 1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n+1}} \right) = \left( 2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_n} \right) u_n - \left( 1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n-1}} \right) u_{n-1}. \quad (\text{II.5})$$

Une remarque préliminaire s'impose. Comme  $\sigma(v)$  s'annule aux extrémités du lac, l'application de cette dernière formule exige des précautions spéciales à ces endroits.

Dans le calcul de  $u_2$ , la contribution de  $u_0$  (nul lui-même) n'est pas nulle : en effet, le rapport  $u_0/\sigma_0$  (qui s'exprime en unités  $10^{-3}$  et n'a pas de dimensions physiques), tend vers un. Par suite, on aura :

$$u_2 \left( 1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_2} \right) = \left( 2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_1} \right) u_1 - \left( \frac{\lambda \Delta v^2}{12} \times 10^{-3} \right).$$

De même, pour le calcul de  $u_{25}$  (qui doit s'annuler si  $\lambda$  est correctement choisi), on devra prendre  $u_{25}/\sigma_{25} = 1 \times 10^{-3}$ , même si  $\lambda$  n'est pas correctement choisi, alors que dans ce cas, le rapport en question n'a pas de valeur finie.

On écrira donc :

$$u_{25} = \left( 2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{24}} \right) u_{24} - \left( 1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{23}} \right) u_{23} - \left( \frac{\lambda \Delta v^2}{12} \times 10^{-3} \right).$$

Premier essai :

$$\lambda_1 = 2,20 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}.$$

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{12 \sigma_n}$	Section n°	$u(v)$ $10^6 \text{ m}^3$	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{12 \sigma_n}$	Section n°	$u(v)$ $10^6 \text{ m}^3$
—	0	—	0,0003214	13	245,6199
0,0017482	1	22,1317 (arbitraire)	0,0005096	14	259,7023
0,0007619	2	43,8339	0,0005190	15	272,2411
0,0006165	3	65,1233	0,0005466	16	283,0800
0,0005928	4	85,9269	0,0005796	17	292,0610
0,0004802	5	106,1300	0,0005932	18	299,0172
0,0003882	6	125,7238	0,0008020	19	303,7863
0,0003345	7	144,7301	0,0015051	20	305,4819
0,0003021	8	163,1542	0,0050432	21	300,8190
0,0002815	9	180,9861	0,0124816	22	277,0672
0,0002362	10	198,2025	0,0116886	23	214,6766
0,0002819	11	214,7402	0,0159703	24	121,7901
0,0002646	12	230,5548	—	25	6,9349

On voit que les résultats pour  $u(v)$  diffèrent très peu de ceux trouvés par la formule plus simple (II.4). Afin de rendre la comparaison plus concluante, reprenons encore le calcul complet avec  $\lambda_1 = 2,25 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$ , et interpolons ensuite linéairement, afin d'améliorer la valeur trouvée pour  $\lambda_1$ .

Second essai :

$$\lambda_1 = 2,25 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}.$$

Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{12 \sigma_n}$	Section n°	$u(v)$ $10^6 \text{ m}^3$	Table auxiliaire $\frac{\lambda_1 \Delta v^2}{12 \sigma_n}$	Section n°	$u(v)$ $10^6 \text{ m}^3$
—	0	0	0,0003287	13	244,9086
0,0017879	1	22,1317 (arbitraire)	0,0005212	14	258,8509
0,0007792	2	43,8242	0,0005308	15	271,2196
0,0006305	3	65,0946			
0,0006063	4	85,8694	0,0005590	16	281,8562
0,0004910	5	106,0305	0,0005927	17	290,6010
			0,0006067	18	297,2854
0,0003791	6	125,5713	0,0008202	19	301,7465
0,0003422	7	144,5345	0,0015392	20	303,0858
0,0003090	8	162,9052			
0,0002879	9	180,6710	0,0051579	21	297,9756
0,0002918	10	197,8086	0,0127652	22	273,5378
			0,0119542	23	210,1335
0,0002883	11	214,2552	0,0163333	24	116,2193
0,0002706	12	229,9642	—	25	0,8013

En extrapolant linéairement, on obtient la valeur « améliorée » pour  $\lambda_1$  :  
 $\lambda_1 = 2,257 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1}$  ou  $T_1 \simeq 4.223 \text{ sec.} = 70 \text{ min. } 23 \text{ sec.}$

L'écart avec la période trouvée par la méthode d'existence de A. DEFANT ( $T_1 = 4.277 \text{ sec.} = 71 \text{ min. } 17 \text{ sec.}$ ) n'est que de 1,26 % environ.

Remarque. — Il ne faut pas s'étonner de ce que la formule (II.5), plus raffinée que la formule (II.4), conduise à un résultat qui s'écarte davantage du résultat expérimental ( $T_1 = 4.410 \text{ sec.}$  environ, soit 73 min. 30 sec.) que celui trouvé par la formule (II.4).

En effet, le lac étudié ici diffère légèrement du lac de Genève, puisque toutes les valeurs adoptées pour  $\sigma(v)$  sont interpolées, ce qui peut donner lieu (étant donné le caractère assez rudimentaire de l'interpolation) à des écarts sensibles avec les valeurs « exactes ». Mais on a déjà souligné que la présente comparaison sert avant tout à montrer comment deux formules de résolution de l'équation (I.10) par différences finies, l'une assez grossière, l'autre plus raffinée, conduisent à des périodes propres qui diffèrent de moins de 0,5 % entre elles. Ceci paraît une justification expérimentale satisfaisante de l'emploi de la première formule, qui a été fait systématiquement dans la seconde partie de ce livre.

Voici, pour terminer, un calcul de la dénivellation :

$$\zeta = - \frac{\Delta u}{\Delta v}$$

A partir des résultats trouvés par la formule (II. 4)		Section n°	A partir des résultats trouvés par la formule (II. 5)	
$(\lambda_1 = 2,20$ $\times 10^{-9} \text{ cm}^{-1})$	$(\lambda_1 = 2,25$ $\times 10^{-9} \text{ cm}^{-1})$		$(\lambda_1 = 2,20$ $\times 10^{-9} \text{ cm}^{-1})$	$(\lambda_1 = 2,25$ $\times 10^{-9} \text{ cm}^{-1})$
$\zeta$ cm	$\zeta$ cm		$\zeta$ cm	$\zeta$ cm
98,802	98,802	1	98,802	98,802
96,729	96,683	2	96,885	96,842
94,942	94,855	3	95,042	94,957
92,792	92,658	4	92,873	92,745
90,066	89,871	5	90,192	90,005
87,339	87,085	6	87,472	87,236
84,727	84,417	7	84,850	84,657
82,136	81,771	8	82,250	82,012
79,499	79,078	9	79,608	79,312
76,772	76,296	10	76,859	76,507
73,737	73,200	11	73,829	73,422
70,498	69,897	12	70,601	70,129
67,234	66,570	13	67,255	66,716
63,001	62,265	14	62,868	62,242
55,927	55,051	15	55,977	55,267
48,365	47,353	16	48,388	47,485
40,083	38,929	17	40,094	39,039
31,024	29,719	18	31,054	29,841
21,529	20,075	19	21,291	19,916
8,487	6,841	20	7,570	5,979
- 16,143	- 18,121	21	- 20,817	- 22,813
- 97,696	-100,646	22	-106,035	-109,097
-284,899	-289,467	23	-278,529	-283,055
-420,247	-424,767	24	-414,672	-419,260
-524,638	-526,376	25	-512,746	-515,259

Comme on peut le voir, les valeurs de  $\zeta$  obtenues par les deux formules de différences finies et pour une même valeur d'essai de  $\lambda_1$  diffèrent très peu entre elles; le profil de la seiche conserve, d'une formule à l'autre, une allure identique. Ceci rejoint les conclusions de la page 107 et montre que la formule (II.4), malgré son caractère assez rudimentaire, est certainement suffisante pour les calculs effectués ici et dans la seconde partie de cet ouvrage.